Towards Mathematical Sciences

Vol. 4, No. 1, Spring and Summer 2024, pp. 65–82

DOI.10.22067/tmsj.2024.88538.1057

Expository Article

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

PRINCIPLES AND STANDARDS OF HIGH SCHOOL MATHEMATICS EDUCATION WITH EMPHASIS ON PROCEDURAL STANDARDS

NOUROOZ HASHEMI*

Department of Mathematics Education, Farhangian University, Tehran, Iran
h.nourooz@cfu.ac.ir

Abstract. Principles of mathematics education and content standards and (NCTM) abstract. The National Council of Mathematics Teachers of America and Canada has compiled a process for school mathematics that most countries, including Iran, have included in the planning of school mathematics courses. In Iran, the use of these standards in both content and process forms is clearly seen in the educational program of school mathematics courses in the field of preparing teaching resources and explaining the teaching methods of mathematics courses. Due to the importance of procedural standards and the fact that in the research of school mathematics education, especially in secondary school, they have been less discussed in comparison with content standards, this study is for the first time in a coherent way with the method of library research and collecting information from First-hand and important sources and documents and by categorizing and analyzing this information by the method of document analysis, it has defined and introduced the principles and standards of high school mathematics education, such as content and process, and considering the importance of process standards of this type The standard has been emphasized and explained. Also, the relationship of various process standards with each other and their importance in school mathematics education has been investigated and analyzed, and the new modeling process standard has been introduced and described. In addition, how to use them is provided for the use of professionals, teachers, students and students.

2020 Mathematics Subject Classification. 97C30,97C70, 97D60.

Keywords. Principles of mathematics education, standards, process, secondary mathematics, mathematics education.

Date: Rceived 16-6-2024 Revised 18-8-2024 Accepted 2-9-2024 Available Online 26-9-2024

©Ferdowsi University of Mashhad.

دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳، صص. ۶۵-۸۲
DOI. 10.22067/tmsj.2024.88538.1057
مقاله علمی-ترویجی

به سوی علوم ریاضی

https://tmsj.um.ac.ir

اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه با تأکید بر استانداردهای فرآیندی

نوروز هاشمی*

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران
h.nourooz@cfu.ac.ir

چکیده. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) اصول آموزش ریاضی و استانداردهای محتوایی و فرآیندی برای ریاضیات مدرسه‌ای تدوین کرده است که اکثر کشورها ازجمله کشور ایران آن را در برنامه‌ریزی دروس ریاضی آموزشگاهی گنجانده‌اند. در ایران، در برنامه آموزشی دروس ریاضی مدرسه‌ای در ساحت تهیه‌ی منابع درسی و تبیین روش‌های تدریس دروس ریاضی استفاده از این استانداردها در دو قالب محتوایی و فرآیندی به‌روشنی دیده می‌شود. با توجه به اهمیت استانداردهای فرآیندی و اینکه در تحقیقات آموزش ریاضی مدرسه‌ای و به‌ویژه دوره‌ی متوسطه کمتر به آن‌ها در مقایسه با استانداردهای محتوایی پرداخته‌شده است، این مطالعه برای اولین بار به‌صورت منسجم با روش تحقیق کتابخانه‌ای و جمع‌آوری اطلاعات از منابع و اسناد دست‌اول و مهم و با دسته‌بندی، تجزیه‌وتحلیل این اطلاعات به روش تحلیل اسنادی، به تعریف و معرفی اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه از قبیل محتوایی و فرآیندی پرداخته است و با توجه به اهمیت استانداردهای فرآیندی، این نوع استاندارد را مورد تأکید و توضیح قرار داده است. همچنین ارتباط انواع استانداردهای فرآیندی با همدیگر و اهمیت آن‌ها در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای مورد بررسی و تحلیل قرارگرفته است و استاندارد جدید فرآیندی مدل‌سازی معرفی و شرح داده‌شده است. به‌علاوه، چگونگی کاربرد آن‌ها برای استفاده‌ی متخصصان، معلمان، دانشجویان و دانش‌آموزان ارائه‌شده است.

2010 Mathematics Subject Classification. 97C30,97C70, 97D60.
واژگان کلیدی. اصول آموزش ریاضی، استانداردها، فرآیندی، ریاضیات متوسطه، آموزش ریاضی.
تاریخ: دریافت ۱۴۰۳/۳/۲۷ بازنگری ۱۴۰۳/۵/۲۸ پذیرش ۱۴۰۳/۶/۱۲ انتشار برخط ۱۴۰۳/۷/۵
نحوه ارجاع به این مقاله: ن. هاشمی، اصول و استانداردهای آموزش ریاضی دوره‌ی متوسطه با تأکید بر استانداردهای فرآیندی، به سوی علوم ریاضی، ۴ (۱۴۰۳)، شماره ۱، ۶۵-۸۲.
©دانشگاه فردوسی مشهد.

۱. پیش‌گفتار

ریاضیات در زندگی روزمره مهم است و به انسان امکان می‌دهد دنیای اطراف خود را به‌خوبی درک کند و زندگی خود را مدیریت کند. استفاده از ریاضیات بشر را قادر می‌سازد تا موقعیت‌های زندگی واقعی را مدل‌سازی کند و ارتباطات و پیش‌بینی‌های آگاهانه ایجاد کند. افراد را با مهارت‌هایی که برای تفسیر و تجزیه‌وتحلیل اطلاعات، ساده‌سازی و حل مشکلات، ارزیابی ریسک و تصمیم‌گیری آگاهانه نیاز دارند، مجهز می‌کند [۳۰]. ریاضیات نقش مهمی در زمینه‌هایی مانند علم یا فناوری ایفا می‌کند و برای تحقیق و توسعه در زمینه‌هایی مانند مهندسی، علوم محاسباتی، پزشکی و مالی حیاتی است. یادگیری ریاضیات به کودکان و جوانان دسترسی به برنامه درسی گسترده‌تر و فرصتی برای پیگیری مطالعات و علایق بیشتر می‌دهد. ازآنجایی‌که ریاضیات غنی و محرک است، یادگیرندگان را در هر سنی با توجه به علایق و توانایی‌های آن‌ها جذب می‌کند [۴۰]. یادگیری ریاضیات استدلال منطقی، تجزیه‌وتحلیل، مهارت‌های حل مسئله، خلاقیت و توانایی تفکر به روش انتزاعی را توسعه می‌دهد. زبان ریاضیات از یک زبان جهانی از اعداد و نمادها استفاده می‌کند که به یادگیرندگان امکان می‌دهد ایده‌ها را به روشی مختصر، بدون ابهام و دقیق باهم مرتبط کنند. ناردی و کنوت [1] [۳۷] بر این باورند که برای رویارویی با چالش‌های قرن بیست و یکم، هر جوان باید در استفاده از مهارت‌های ریاضی اعتماد داشته باشد. درک نقشی که ریاضیات تقریباً در تمام جنبه‌های زندگی ایفا می‌کند بسیار مهم است. این نیاز به ریاضیات برای ایفای نقشی جدایی‌ناپذیر در یادگیری مادام‌العمر را تقویت می‌کند و درک و فهم مفاهیم ریاضیات از اهمیت خاصی برخوردار می‌شود. ازنظر شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا یا **NCTM** [2]، برای درک مناسب از ریاضی و عمل در ریاضی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل، صرف آموزش موضوعات ریاضی کافی نیستند، بلکه طراحی برنامه آموزشی و تعیین حدومرزها در مفاهیم و روش‌های آموزشی بسیار مهم و اساسی می‌باشند. اصول آموزش ریاضی از مهم‌ترین موضوعات زیربنایی است که به نظر می‌رسد سیاست‌های آموزش ریاضی بر اساس آن طرح‌ریزی می‌شود [۴۳]. همان‌طور که مشخص است، اصول قوانینی است که بدون اثبات و تجزیه‌وتحلیل پذیرفته می‌شود [۱۴]. اصول آموزش ریاضی ویژگی‌های خاص آموزش ریاضی باکیفیت قابل‌قبول را توصیف می‌کند [۲۱]. در سال ۲۰۰۰، **NCTM** اصول آموزش را مساوات [3] (عدالت آموزشی)، برنامه درسی [4]، تدریس [5]، یادگیری [6]، ارزیابی [7] و فناوری [8] اعلام کرد و این شش مورد را برای

---

[1] Nardi and Knuth

[2] National Council of Teachers of Mathematics

[3] Equity

[4] Curriculum

[5] Teaching

[6] Learning

[7] Assessment

[8] Technology

آموزش ریاضیات در هر نقطه‌ای از جهان پایه‌ای و اساسی برشمرد. در جدول ۱، معنا و تعریف این اصول از دید شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا ارائه‌شده است. با توجه به موارد اشاره‌شده در جدول بالا (جدول ۱)،

جدول ۱: اصول آموزش ریاضی

اصل آموزش ریاضی	تعریف و توضیح
مساوات	تعالی در آموزش ریاضی مستلزم مساوات و حمایت قوی از تمام دانش‌آموزان است.
برنامه‌ی درسی	یک برنامه درسی چیزی بیش‌تر از مجموعه فعالیت‌هاست. این برنامه باید منسجم باشد و بر ریاضیات مهمی متمرکز شود که به‌خوبی در سراسر پایه‌ها تحصیلی قرارگرفته است.
تدریس	تدریس مؤثر ریاضی مستلزم این درک است که دانش‌آموزان چه می‌دانند و نیاز به یادگیری چه چیزی دارند و سپس به چالش انداختن و حمایت آن‌ها برای خوب یادگیری آن‌هاست.
یادگیری	دانش‌آموزان باید ریاضی را با درک و فهم یاد بگیرند و فعالانه دانش جدید را بر اساس تجربه و دانش قبلی بسازند.
ارزیابی	ارزیابی باید حامی یادگیری ریاضیات مهمی باشد که دانش‌آموز یاد گرفته است و اطلاعات مفید را هم به معلمان و هم به دانش‌آموزان بدهد.
تکنولوژی	در تدریس و یادگیری ریاضی، تکنولوژی حیاتی است. تکنولوژی بر ریاضیاتی که تدریس می‌شود تأثیر می‌گذارد و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقاء می‌دهد.

این باور وجود دارد که اگر فعالیت‌های آموزشی مطابق با این اصول توسعه یابند، می‌توانند یادگیری مفاهیم و محتوای ریاضی را برای معلمان و دانش‌آموزان جذاب و قابل‌درک کنند تا آن‌ها از این اصول در برنامه‌ریزی و تدریس درس خود بهره ببرند. معلمان و آموزشگران ریاضی همیشه در تلاش هستند تا تأثیری را که بر یادگیری ریاضی دانش‌آموزان خود دارند، افزایش دهند که اصول آموزش ریاضی می‌توانند به آن‌ها دررسیدن به این هدف کمک نماید [۳۰]. بر اساس دیدگاه شورای معلمان ریاضی آمریکا، اصول آموزش ریاضی زمینه را برای تدوین استانداردهای آموزش ریاضی اعم از محتوایی و فرآیندی آماده کرده است [۷]. در عمل ریاضی، عوامل و مهارت‌های خاصی درکارند که آن‌ها را استانداردهای آموزش ریاضی می‌نامند [۲۰]. استانداردها بر دو نوع محتوایی و فرآیندی می‌باشند. استانداردهای محتوایی که به محتوا می‌پردازد اینکه چه مباحثی را باید بخوانند، هر مبحث را تا چه حدی گسترش دهند، چه مفاهیمی و تا چه مقداری درکتاب‌ها گنجانده شود. این استاندارد شامل اعداد و عملیات، جبر، هندسه، اندازه‌گیری، تحلیل داده‌ها و احتمال هست. استانداردهای محتوایی، ریاضیاتی را که باید در هر پایه تدریس شود را مشخص می‌کنند [۹، ۱۱]. در جدول ۲، استانداردهای محتوایی از منظر اهداف و برنامه آموزشی آن‌ها به‌صورت کامل آمده است. استانداردهای محتوایی و اهداف آن‌ها که در جدول ۲ ارائه گردید و در بستر استانداردهای فرآیندی مورداستفاده قرار می‌گیرد. قابل‌ذکر است هرچند کریمی

جدول ۲: استانداردهای محتوایی آموزش ریاضی

استاندارد محتوایی	اهداف آموزشی
اعداد و عملیات	درک اعداد و روش‌های نمایش اعداد، فهمیدن روابط بین اعداد و دستگاه‌های اعداد، درک مفاهیم اعمال ریاضی و ارتباط بین آن‌ها و شمردن به‌طور روان و تخمین زدن معقولانه.
جبر	درک کردن نمونه‌ها، روابط و توابع، دانستن طرز نمایش و تحلیل ساختارها و موقعیت‌های ریاضی، استفاده از نمادهای جبری، استفاده از مدل‌های ریاضی برای نمایش و درک روابط کمی، تجزیه‌وتحلیل تغییرات در زمینه‌های متفاوت.
هندسه	تحلیل شاخص‌ها و خواص اشکال هندسی دوبعدی و سه‌بعدی و چندبعدی و توسعه بحث‌های ریاضی درباره روابط هندسی، شناختن مکان‌ها و توصیف روابط مکانی با استفاده از هندسه مختصاتی و دیگر دستگاه‌های نمایش، به کاربردن انتقال و استفاده از تقارن برای تحلیل موقعیت‌های ریاضی، استفاده از تجسم و تصور ذهنی، استدلال مکانی و مدل‌سازی هندسی برای حل مسائل.
اندازه‌گیری	درک ویژگی‌های قابل‌اندازه‌گیری در اشیاء، شناخت واحدها و دستگاه‌ها و روندهای اندازه‌گیری، استفاده از روش‌ها، ابزارها و فرمول‌های مناسب برای تعیین اندازه‌ها.
تحلیل داده‌ها و احتمال	تنظیم پرسش‌هایی که می‌تواند بر اساس داده‌ها عنوان شود، جمع‌آوری و فراهم کردن و نمایش داده‌های مناسب برای پاسخ‌دهی به پرسش‌ها، انتخاب و استفاده از روش‌های آماری مناسب برای تجزیه‌وتحلیل داده‌ها.
تکنولوژی	در تدریس و یادگیری ریاضی، تکنولوژی حیاتی است. تکنولوژی بر ریاضیاتی که تدریس می‌شود تأثیر می‌گذارد و یادگیری دانش‌آموزان را ارتقاء می‌دهد.

فردین پور و گویا [۲۰، ۲۱] به‌صورت مختصر به این استانداردهای فرآیندی اشاراتی کرده‌اند ولی این مقاله برای اولین اصول و استانداردهای آموزش ریاضی را به‌صورت کامل و یکپارچه ارائه کرده است.

۲. استانداردهای فرآیندی

شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا بر این باور است که برنامه درسی مناسب باید بر حل مسئله، ایجاد ارتباط بین مباحث ریاضی، برقراری ارتباط با مفاهیم ریاضی با استفاده از زبان مناسب و ایجاد عدالت در یادگیری برای همه دانش‌آموزان متمرکز باشد. سال‌هاست که راهبردهای پیشنهادی NCTM در پی تغییر و بهبود الگوهای تدریس معلمان است و به‌جای دانش رویه‌ای تأکید زیادی بر درک مفهومی دارد. این شورا، شش استاندارد فرآیندی در آموزش ریاضی را در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای توصیه می‌کند و همچنین بر لزوم به‌کارگیری آن‌ها در آموزش ریاضی تأکید می‌کند. استانداردهای فرآیندی روش‌های کسب

دانش محتوایی را موردبحث قرار می‌دهند [۸]. همان‌گونه که در اصول و استانداردها تأکید شده است [۲۱]، استانداردهای فرآیندی، ماهیتی متفاوت از مباحث و موضوعات مختلف ریاضی دارند، ولی هر یک از آن‌ها در فرآیند یادگیری ریاضی در همه‌ی پایه‌های تحصیلی مدرسه حاکم هستند. این استانداردها مشخص می‌کنند که به چه شیوه‌ای ریاضیات موردنظر باید تدریس شود و چگونه دانش‌آموزان با انجام دادن ریاضیات می‌توانند آن را فراگیرند [۱۰]. شورای معلمان ریاضی امریکا و کانادا استانداردهای فرآیندی را استدلال و اثبات، پیوند و ارتباطات، بازنمایی، گفتمان، حل مسئله و مدل‌سازی و کاربرد آن می‌داند که استاندارد مدل‌سازی استاندارد جدیدی است که به‌تازگی به استانداردهای فرآیندی آموزش ریاضی از طرف NCTM در سال ۲۰۲۰ اضافه‌شده است. به دلیل اهمیت استانداردهای فرآیندی در آموزش ریاضی، در این مقاله به توضیح و تشریح کامل آن‌ها پرداخته‌شده است.

۱.۲. **استدلال و اثبات.** امام‌جمعه و دافعی [۴] بیان داشته‌اند شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) معتقد است که برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم باید همه‌ی دانش‌آموزان را قادر سازد تا استدلال و اثبات را به‌عنوان جنبه‌های اساسی ریاضی، تشخیص دهند؛ حدسیه‌های ریاضی بسازند و راجع به‌درستی آن‌ها، تحقیق کنند. ادعاها و اثبات‌های ریاضی بسازند و آن‌ها را ارزیابی کنند؛ انواع مختلف استدلال و روش‌های اثباتی را انتخاب و استفاده کنند. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین تعاریف اثبات عبارت است از یک استدلال معقول و منطقی از حقایق قابل‌قبول. نکته‌ای که در این تعریف باید به آن توجه کرد تفاوت اثبات و استدلال است. استدلال دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است [۷]. استفاده از استدلالی که موضوع موردنظر را به‌درستی نتیجه دهد اثبات می‌گویند. برگر، مکنزی و هولمز [۹] [۲۸] بر این باورند با توجه به نظر آموزشگران ریاضی، نقش اثبات در ریاضی را می‌توان تائید درستی یک عبارت؛ توضیح چرایی درستی یک عبارت؛ ایجاد ارتباطات با دانش ریاضی؛ کشف یا خلق جدیدی در ریاضی و نظام‌دار کردن عبارت‌ها در یک نظام اصل موضوعی دانست. به نظر می‌رسد که هیچ‌کس در جامعه‌ی ریاضی، با این ادعا مخالفتی ندارد که ریاضی یک علم استنتاجی است و مشخصه‌ی آن اثبات است. بر مبنای دیدگاه مشترک ریاضیدان‌ها، ریاضی با ایده‌ها و اصول موضوع اولیه شروع می‌شود و سپس به‌وسیله‌ی آن‌ها، تمام ایده‌های بعدی تعریف می‌شوند. تمام قضیه‌هایی هم که اصل موضوع نیستند، از اصول موضوع و به‌وسیله‌ی قوانین مشخص استنباطی، اثبات می‌شوند [۱۷]. محققان اهمیت استدلال و اثبات را در ریاضیات موردبحث قرار داده‌اند و در تحقیقات خود نشان می‌دهند که درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات، غیرممکن است. برخی از آن‌ها معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. همچنین، آن‌ها در تحقیقات خود نشان می‌دهند دانشی که فاقد توجیه کردن است، به‌راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی‌که ریاضیات به‌عنوان علمی مستدل به‌جای مجموعه‌ای از رویه‌ها یادگرفته می‌شود، دانش به‌دست‌آمده به‌راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی

[9] Berger, Mackenzie and Holmes

وقتی‌که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. درواقع، استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند فعالیت‌های ریاضی را به‌عنوان یک مجموعه‌ی منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند [۳۸]. ریاضیدانان معتقدند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشم‌ها می‌توانند ما را منحرف کنند. اندازه‌گیری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری، به‌دقت ابزار بستگی دارد. آزمایش نیز به‌طورقطع ثابت نمی‌کند، زیرا نتایج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست [۳۳]. البته در برخی موارد، بین ریاضیدانان نیز نظرات و دیدگاه‌های مختلفی در مورد نقش و اهداف اثبات و آنچه یک اثبات را می‌سازد، مشاهده می‌شود. همان‌گونه که اهمیت اثبات و استدلال‌های منطقی برای ریاضیدانان مشخص‌شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند [۱۳]. باید توجه داشت که اساس ریاضیات، استدلال است. درحالی‌که علم توسط مشاهده تائید می‌شود، ریاضیات توسط استدلال منطقی مورد تائید قرار می‌گیرد. بنابراین جوهره‌ی ریاضیات در اثبات‌ها نهفته است و باید به تفاوت بین مثال، حدسیه و اثبات، توجه کرد. نتایج ریاضی، تنها زمانی معتبر هستند که دقیقاً اثبات شوند [۱۶]. می‌توان درستی نتایج را در تعداد محدودی از حالت‌ها به‌طور مستقیم نشان داد ولی دانش‌آموزان باید بدانند که تمام آنچه به آن‌ها نشان داده‌شده است، تنها مربوط به همان حالت‌های خاص است و تا زمانی که آن نتیجه کاملاً به اثبات نرسیده است، تنها شاهدی است برای یک حدس. لایتنر [۱۰] چهارگام را در فرایند استدلال معرفی می‌کند که تقریباً مشابه مراحل حل مسئله به روش پولیا [۱۱] است؛ نخست موقعیتی سؤال‌برانگیز و دشوار پیدا می‌شود که مشخص نیست چگونه باید اقدام کرد. دوم، شخص تلاش می‌کند که راهبردی برای حل مسئله انتخاب کند (به یاد آورد، بسازد و یا کشف کند). سپس بررسی می‌کند که آیا راهبرد موردنظر، مسئله را حل می‌کند یا نه و اگر نه، به دنبال راهبرد دیگری خواهد بود. سوم، این مرحله که اجرای راهبرد نامیده می‌شود، می‌تواند از طریق استدلال‌های تأییدکننده حمایت شود؛ بدین‌صورت که شخص در پی آن است که آیا راهبرد موردنظر به کار می‌آید؟ وگرنه دوباره راهبرد دیگری انتخاب و اجرا می‌شود. چهارم، مرحله آخر یعنی نتیجه‌گیری، بعد از طي مراحل بالا یک نتیجه‌ی کلی به دست می‌آید [۵]. باکویی و همکاران [۵] مشخص کردند که لایتنر نیز بین دو نوع استدلال تمایز قائل می‌شود که عبارتند از استدلال تقلیدی؛ که از روی عادت و تکرار یادگرفته می‌شود و دو نوع دارد از قبیل استدلال به یادسپاری؛ (مربوط به حافظه)، برای مثال، دانش‌آموزی که يك مسئله را با استفاده از يك جواب کامل و معین در کتاب درسی یا حل‌شده توسط معلم حل می‌کند و استدلال الگوریتمی؛ که در آن يك مسئله از طريق به کار بردن رویه‌ای معین حل می‌شود. دوم، استدلال خلاقانه؛ شامل دنباله‌ای از استدلال‌های جدید است که بر اساس اصول ریاضی هستند. تفاوت مهم بین استدلال تقلیدی و خلاقانه این است که نوع اول ضرورتاً شامل تفکر مفهومی و تحلیلی نیست، درحالی‌که

[10]Lithner

[11]Polya

به گفته لایتنر، چنین فرایند تفکری برای استدلال خلاقانه ضروری است. پنج نوع فعالیت استدلالی را که عموماً در قلمرو پیش از اثبات به آن‌ها توجه می‌شود و دارای سلسله‌مراتب هستند، چنین مطرح می‌شوند؛ اول، شناخت و ساخت الگوها. اولین مهارت، شناخت و ساخت الگوها یا قوانین برای کشف مسائل معین است. دوم، توصیف الگوها؛ پس از تسلط بر مرحله اول، دانش‌آموزان شروع به توصیف الگوها از طریق قانون‌گذاری به‌صورت رسمی (استفاده از نمادهای جبری) یا غیررسمی (مثلاً توصیف روایتی) می‌کنند. سوم، حدسیه‌سازی که پس از تسلط بر مرحله‌ی دوم دانش‌آموزان حدسیه‌سازی می‌کنند. یعنی قادر هستند که الگو یا قانونی را بیان کنند که به‌طورکلی درست است؛ گرچه آن‌ها هنوز ضرورت اثبات کردن را نمی‌دانند. چهارم، استدلال استقرایی که ممکن است دانش‌آموزان با بررسی چند مثال و مورد خاص، درستی حدسشان را تأیید کنند و پنجم، بگویند که گزاره موردنظر همیشه درست است. استدلال استنتاجی، اثبات صوری، درک شهودی، استدلال تمثیلی، استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، بازگشتی و برهان خلف از موارد اثبات و استدلال در حل مسائل اثباتی و حتی حل‌کردنی است [۱۳].

۲.۲. اتصالات و ارتباطات (ارتباطات مفهومی). آزوبل [12] [۲۷] بر این عقیده است که برای این‌که یادگیری معنادار اتفاق بیافتد سه شرط لازم است. ابتدا، یادگیرنده باید رابطه‌ای بین مفاهیمی که باید آموخته شود، احساس کند. دوم، یادگیرنده باید دارای دانش خاص مرتبط با مطالب جدید باشد تا بتواند ارتباط برقرار کند. سوم، یادگیرنده به‌صورت عملی بخواهد دانش جدید را به دانشی که قبلاً داشته مرتبط کند. درک ارتباطات و اتصالات در ریاضیات توسط دانش‌آموزان به‌منظور توانمند کردن برای توصیف موقعیت‌های پیچیده و کنترل دقیق وضعیت‌ها ضروری است. درواقع فهمیدن به‌عنوان اندازه کمی و کیفی اتصالاتی تعریف می‌شود که یک ایده با ایده‌های موجود فرد دارد [۲]. یکی از اهداف بسیار مهم که باید در فرآیند یادگیری ریاضی به آن دست‌یافت، توانایی برقراری ارتباط و اتصال بین خود موضوعات ریاضی و همچنین بین مفاهیم ریاضی با دیگر رشته‌ها توسط یادگیرندگان هست [۲۹]. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] اعلام کرده است برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا کلاس دوازدهم باید به هر دانش‌آموز این امکان را بدهد که ارتباط بین ایده‌های ریاضی را بشناسد و از آن‌ها استفاده کند؛ درک کند که چگونه ایده‌های ریاضی به یکدیگر متصل می‌شوند تا یک کل منسجم ایجاد کنند و نهایتاً ریاضیات را در زمینه‌های خارج از آن بشناسد و به کار ببرد. ارتباطات مفهومی یعنی رابطه بین مفاهیم، روش‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، موضوعات ریاضی و همچنین ارتباط ریاضی با سایر موضوعات. مفاهیم و ایده‌های ریاضی در ارتباط با یکدیگرند و شناخت این ارتباطات، درک و یادگیری ریاضیات را عمیق‌تر می‌سازد [۲۱]. تسهیل کردن برقراری ارتباط و اتصال در میان مباحث ریاضیات و میان مباحث ریاضی و دیگر حوزه‌های یادگیری برای ایجاد درک گسترده‌ای که می‌خواهیم کودکان به آن دست یابند، بسیار مهم است. با روشن شدن ارتباطات، بین ایده‌های مختلف ریاضی، کودکان در یادگیری ریاضی توانمندتر می‌شوند. برقراری ارتباط به‌طور اتفاقی و تصادفی رخ نمی‌دهد و بسیاری از دانش‌آموزان معمولاً به‌تنهایی

[12] Ausubel

نمی‌توانند ارتباطات مفهومی این روابط را تشخیص دهند، بلکه باید به‌وضوح آن‌ها را مشخص کرد. بنابراین معلمان باید برای روشن کردن این ارتباطات برنامه‌ریزی کنند. درواقع، مؤثرترین آموزش در صورتی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان از دانش از قبل دانسته شده شروع کنند و از طریق تعامل با معلمان و دانش‌آموزان دیگر، این دانسته‌ها را مبنای کارشان قرار دهند. درنتیجه، برنامه‌ریزی برای رشد این ارتباطات، به‌طور مستقیم هم کارایی تدریس را افزایش می‌دهد و هم به بهبود یادگیری کودکان کمک می‌کند [۳۸]. یو [۱۳] [۴۴] برخی از شاخص‌های توانایی برقراری ارتباط و اتصال ریاضی را بیان می‌کند. این شاخص‌ها عبارتند از پیدا کردن رابطه بین بازنمایی‌های مختلف از مفاهیم و رویه‌ها، درک رابطه بین موضوعات ریاضی؛ استفاده از ریاضیات در سایر علوم و زندگی روزمره؛ درک مفهوم معادل یا روش مشابه؛ یافتن ارتباط بین یک رویه و رویه‌ی دیگر در نمایش معادل؛ به کاربردن اتصالات در میان موضوعات ریاضی و بین ریاضی و سایر موضوعات. برای مثال ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم ریاضی و علومی مانند فیزیک و جغرافیا و همچنین ارتباط و اتصال خود مفاهیم ریاضی به‌عنوان نمونه مفهوم حد با مفهوم انتگرال از مظاهر کاربرد این استاندارد در فرآیند آموزش ریاضی است.

۳.۲. **بازنمایی (نمایش‌های ریاضی).** بازنمایی درک بهتر یک مفهوم است که با استفاده از تمثیل یا چیز دیگر برای آن استفاده می‌شود. همچنین بازنمایی‌ها دانش‌آموزان را وادار می‌کنند که برای آموزش، یادگیری و تعمیم‌دادن یک مفهوم، از چند جهت به آن توجه کنند و ابعاد گسترده، کلی و اجزای مفهوم را شناسایی و رابطه بین عناصر را تعیین کنند [۱۸]. مهارت بازنمایی مربوط به نمایش داده‌ها و اطلاعات و آنچه در ذهن دانش‌آموز می‌گذرد، هست. این مهارت کمک بسیاری برای درک بهتر مطالب و برقراری ارتباط با دیگران می‌کند، یعنی نشان دادن یک مفهوم ریاضی با روش‌های مختلف. این مهارت مربوط به نمایش داده‌ها و آنچه در ذهن دانش‌آموز می‌گذرد، هست. برخی از روش‌های بازنمایی مفاهیم ریاضی عبارتند از بازنمایی دنیای واقعی، تصویری، کلامی، نمادین، ذهنی و فیزیکی [۱۸]. سراجی و سیفی بر این باورند که برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا کلاس دوازدهم باید به هر دانش‌آموز این امکان را بدهد تا مواردی مانند ایجاد و استفاده از نمایش برای سازمان‌دهی، ثبت، و ارتباط ایده‌های ریاضی؛ انتخاب، اعمال، و ترجمه از میان نمایش‌های ریاضی برای حل مسائل و همچنین از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و تفسیر پدیده‌های فیزیکی، اجتماعی و ریاضی استفاده کند[۱۲]. بازنمایی‌ها دانش‌آموزان را وادار می‌کنند که برای آموزش، یادگیری و تعمیم دادن به مفهوم، از چند جهت به آن مراجعه کنند و ابعاد گسترده، کلی و اجزای مفهوم را شناسایی و رابطه‌ی بین عناصر را تعیین کنند. نمودارها، نقشه‌ها، جدول‌ها، نمادها و علائم و غیره همگی برای نمایش مفاهیم ریاضی هستند. از نمایش‌های ریاضی به‌عنوان ابزاری برای فهم و درک و تجزیه‌وتحلیل ایده‌های ریاضی و حل مسائل مختلف و توضیح موقعیت‌های مسئله‌گونه استفاده می‌شود. بنابراین دانش‌آموز هر شکل از صورت‌های نمایشی را باید تشخیص دهد و در جای مناسب به کار گیرد. وقتی چند بازنمایی به‌طور مرتبط به دانش‌آموزان ارائه

[13] Yue

می‌شود، نسبت به بازنمایی‌های منفرد، بیشتر باعث درک انتزاعی یادگیرندگان می‌شوند. ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های متفاوت و اتصال و ارتباط آن‌ها به یکدیگر، باعث به وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها به کمک یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به‌سادگی می‌توانست حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی عددی یا نمادین استفاده کرده بودند که با تجربه‌های قبلی آن‌ها سازگارتر و به میزان بیشتری، مورد تأکیدشان قرارگرفته بود [۲۲]. بازنمایی‌هایی که در یادگیری و حل مسائل ریاضی از آن‌ها استفاده می‌شوند عبارتند از بازنمایی ملموس (وضعیت‌های دنیای واقعی)، بازنمایی فیزیکی (ابزار دست‌ورزی که به‌تنهایی معنای خاصی ندارند و بر اساس اعمالی که انجام می‌دهند معنا پیدا می‌کنند)، بازنمایی تصویری (شکل‌ها و تصویرها)، بازنمایی گفتاری (زبان روزمره) و بازنمایی نوشتاری که از طریق آن کلمات و جملات معنای خاصی می‌گیرند [۲۶]. برای مثال در بازنمایی تصویری، دانش‌آموزان از مشاهده یا رسم یک شکل، نمودار یا تصویر، به‌طور شهودی برای فکر کردن درباره یک مفهوم ریاضی و ارتباط برقرار کردن با آن استفاده می‌کنند. قربانی [۱۸] سخت معتقد است بازنمایی و گفتمان در یادگیری ریاضی دو فرآیند به هم گره‌خورده می‌باشند. توجه ویژه و طرح‌ریزی‌هایی که معلمان برای گفتمان ریاضی انجام می‌دهند تا به دانش‌آموزان کمک کنند که بر یادگیری خویش بازنمایی داشته باشند می‌تواند تبدیل به یک بخش طبیعی از یادگیری ریاضی شود. حتی دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی نیز می‌توانند توضیح دادن جواب یک مسئله و شرح دادن استراتژی‌هایی که بکار می‌برند را یاد بگیرند. می‌توان به دانش‌آموزان دوره‌ی اول متوسطه کمک کرد تا یاد بگیرند با صدای بلند فکر کنند و در تلاش برای پاسخ‌گویی به سؤال‌های معلم و هم‌کلاسی‌های خود استدلال‌های خود را بازنگری کنند. با چنین تجربیاتی دانش‌آموزان مهارت سازمان دادن و ثبت افکار ریاضی خود را به دست خواهند آورد [۳۱].

۴.۲. گفتمان.

با توجه به اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، استاندارد گفتمان را این‌گونه توصیف می‌کنند که گفتمان یک بخش ضروری از ریاضی و بخش مهمی از جریان یاددهی و یادگیری آن است [۲۵]. گفتمان وسیله‌ای است برای در میان گذاشتن اندیشه‌ها و شفاف‌شدن آنچه که یک فرد می‌داند. وقتی ایده‌ای یا پنداشتی بیان می‌شود تبدیل به موضوعی برای بحث کردن شده و در مورد آن تأمل و موشکافی می‌شود تا درنهایت آن پنداشت اصلاح شود. چنین فرآیندی به ساخته‌شدن مفاهیم ریاضی، شکل‌گیری معانی و تداوم اندیشه‌ها کمک می‌کند و به آن‌ها عمومیت می‌بخشد. دانش‌آموزان زمانی که در چالشی برای انتقال‌یافته‌های فکری خودشان و دیگران قرار دارند درباره‌ی ریاضی و استدلال ریاضی فکر می‌کنند و این کمکی برای منطقی‌تر شدن آن‌ها خواهد بود. گوش دادن یا خواندن توضیحات دیگران فرصتی برای دانش‌آموز است تا دانسته‌های خودشان را بسط دهند و درست استدلال کردن و چگونه متقاعد کردن دیگران را بیاموزند. گفت‌وگو درباره‌ی چگونگی پیدا شدن اندیشه‌ها و ایده‌های ریاضی موجب جلب‌توجه دانش‌آموزان به مبحث موردنظر خواهد شد [۳]. دافعی، نصر و مقدمی [۱۰] بیان داشته‌اند استاندارد گفتمان از چهار زیر استاندارد تشکیل‌شده است، اول، دانش‌آموزان افکار ریاضی خود را در ضمن گفتمان سازمان‌دهی کنند و آن‌ها را تثبیت کنند. دوم، دانش‌آموزان قادر باشند افکار

و استراتژی‌های دیگران را تجزیه‌وتحلیل و ارزشیابی کنند. سوم، دانش‌آموزان افکار ریاضی خود را مرتبط و یکپارچه و به‌طور شفاف و واضح به هم‌کلاسی‌ها و معلم‌ها و دیگران انتقال دهند. چهارم، دانش‌آموزان قادر باشند زبان ریاضی را به‌طور روشن و آشکار برای بیان ایده‌های ریاضی بکار ببرند. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] معتقدند دانش‌آموزانی که درگیر بحث کردن برای توجیه یک راه‌حل هستند بخصوص وقتی با نظر مخالفی مواجه باشد و در تلاش برای متقاعد کردن هم‌کلاسی‌هایشان که احتمالاً نقطه نظرات متفاوتی دارند به درک و فهم بهتری از ریاضی نائل خواهند شد. سیلور،کیل پاتریک و شلسینگر [۱۴] [۴۱] تأکید می‌کنند وقتی دانش‌آموزی روش حل مسئله را ارائه می‌دهد و از استدلال خود در مقابل هم‌کلاسی‌ها و معلم خود دفاع می‌کند و یا هنگامی‌که با چیزی که در ذهن او یک معما شده است کلنجار می‌رود بصیرت عمیقی درباره‌ی افکارش به دست می‌آورد. گفتمان در ریاضی می‌تواند به دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم جدید ریاضی کمک کند. چون در این حالت آن‌ها در یک موقعیت واقعی حرکت می‌کنند، به‌طور شفاهی توضیح، تشریح و بیان علت می‌کنند، نمودارها و شکل‌ها را به خدمت می‌گیرند، می‌نویسند، و نمادهای ریاضی را به کار می‌گیرند تا به هدفی که دارند برسند. یعنی آن‌ها برای دفاع از ایده‌های خود و متقاعد کردن دیگران همه ابزارهای ریاضی را می‌شناسند و بکار می‌گیرند و در این میان بدفهمی‌های آن‌ها قابل‌شناسایی می‌شود. بازدهی دیگر این رویدادها این است که دانش‌آموزان به یاد می‌آورند که در مسئولیت یادگیری که در کلاس درس اتفاق می‌افتد با معلم خود شریک هستند. لمپرت [۱۵] [۳۴] معتقد است زمانی که تصورات و اندیشه‌هایی درباره‌ی ریاضی در جمعی مطرح می‌شود هم برای دانش‌آموزان مفید است، زیرا بخشی از بحث را به عهده‌دارند و هم برای معلم مفید است، همچنین می‌تواند با فرآیند یادگیری دانش‌آموزان بیشتر آشنا شود. معلمان باید محیطی در کلاس درس ایجاد کنند که دانش‌آموزان بتوانند آزادانه تصورات و اندیشه‌های خود را بیان کنند. دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی نیز برای اینکه تصورات، پنداشت‌ها و اندیشه‌های خود را با یکدیگر در میان بگذارند به کمک معلم نیاز دارند تا این کار به روشی انجام شود که به اندازه‌ی کافی برای سایر دانش‌آموزان واضح و شفاف باشد. دانش‌آموزان سال‌های آخر دوره‌ی ابتدایی و اوایل دوره‌ی متوسطه باید به‌تدریج مسئولیت شرکت در بحث‌های کلاسی را بپذیرند و در مقابل یکدیگر مسئولیت‌پذیر باشند و توانایی آن‌ها در گوش کردن، به زبان ساده‌تر بیان کردن، سؤال پرسیدن و نظر دیگران را تفسیر کردن افزایش یابد. برای بعضی از دانش‌آموزان شرکت کردن در بحث‌های کلاسی چالش‌برانگیز و تا حدودی مشکل‌آفرین است. مثلاً برای دانش‌آموزان دوره‌ی اول متوسطه به چشم آمدن در فعالیت‌های گروهی اکراه آمیز است. دانش‌آموزان در این سن دوست ندارند معلم بداند که آن‌ها چه چیزی را بلد نیستند. بنابراین سعی می‌کنند از پرسیدن و سؤال کردن یا قرارگرفتن در موقعیتی که آن‌ها فکر می‌کنند می‌توانند به بلد نبودن آن‌ها تعبیر شود اجتناب کنند [۲۰، ۲۱]. بااین‌حال معلم می‌تواند در ایجاد یک محیط خوب کلاسی برای بحث کردن موفق شود. زمانی که دانش‌آموزان از دبیرستان فارغ‌التحصیل می‌شوند، باید از

[14] Silver, Kilpatrick and Schlesinger

[15] Lampert

قابلیت‌های درونی صحبت کردن و بحث کردن برخوردار باشند و آن‌ها باید بحث‌های کامل و شفافی را ارائه کنند تا بتوانند در جامعه از خود دفاع کنند. شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۸] بر این باور است زمانی که پنداشت‌ها ردوبدل می‌شوند و مورد انتقادهای متفکران قرار می‌گیرند، پالایش‌شده و توسعه می‌یابند. در حال حاضر، تغییرات در محل کار به‌طور فزاینده‌ای نیازمند کار گروهی، همکاری و گفتمان است. ریاضی در دانشگاه‌ها به‌طور روزافزونی بر توانایی انتقال شفاف پنداشت‌های زبانی و نوشتاری تأکید دارد. در جهت آماده شدن برای آینده، دانش‌آموزان دبیرستانی، باید توانایی دادوستد و تدریس مؤثر پنداشت‌های ریاضی خود را با دیگران داشته باشند. تعامل با دیگران درواقع فرصتی برای دادوستد پنداشت‌ها و بازتاب بر آن‌هاست. بنابراین گفتمان یک عنصر اساسی و پایه‌ای در یادگیری ریاضی است.

۵.۲. حل مسئله.

در سند منتشرشده NCTM در سال ۲۰۰۶ [۳۸]، درباره‌ی استاندارد حل مسئله این‌گونه بیان‌شده است که برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی دوازدهم باید همه‌ی دانش‌آموزان را قادر سازد تا دانش ریاضی جدید خود را از طریق حل مسئله بسازند؛ مسائلی را که در ریاضیات یا موقعیت‌های دیگر به وجود می‌آیند را حل کنند؛ برای حل مسائل، یک گستره از راهبردهای متفاوت و متناسب را به‌کارگیرند؛ بر فرآیند حل مسئله‌ی ریاضی، تأمل و بازبینی داشته باشند؛ در سند راهنمای برنامه‌ی درسی ریاضی ایران نیز حل مسئله به‌عنوان یکی از مهارت‌های اساسی تفکر ریاضی موردتوجه قرارگرفته است [۱۵]. بااین‌وجود، هنوز در بسیاری از مدارس امروز در جریان تدریس و اجرای برنامه‌های درسی تأکید بر کسب دانش و معلومات از طریق یادگیری طوطی‌وار و حفظی است و معمولاً برای آموزش مهارت‌های تفکر از طریق فرآیند حل مسئله کوشش چندانی صورت نمی‌گیرد. حال آن‌که پولیا تسلط بر ریاضیات را توانایی و مهارت در حل مسئله و به معنای داشتن استقلال اندیشه، عقل سلیم و نیروی نوآفرینی دانسته است. مسئله از دیدگاه پولیا عبارت است از ضرورت جست‌وجوی آگاهانه‌ی وسیله‌ای مناسب، برای رسیدن به هدفی، که در بدو امر این وسیله غیرقابل‌دسترس هست. حل مسئله، به معنای پیدا کردن این وسیله است [۲۴]. شونفیلد [۴۲] [۱۶] مسئله را فعالیتی تعریف می‌کند که در آن دانش‌آموز، علاقمندانه درگیر است و تلاش دارد که راه‌حلی برای آن پیدا کند و وسیله‌ی ریاضی در دسترس و از قبل آماده‌ای که با آن به هدف برسد را ندارد. او دانش و رفتار لازم برای انجام حل مسئله را در چهار مرحله‌ی منابع، رهیافت‌ها، کنترل و نظام باورها بیان می‌دارد. شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا در سند اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه‌ای در دوره‌ی متوسطه به‌طور مشابهی، حل مسئله را درگیر شدن در وظیفه، تکلیف و فعالیتی می‌داند که روش حل آن از پیش شناخته‌شده نیست، به این خاطر برای یافتن راه‌حل، دانش‌آموزان باید آن را از درون دانش خودشان بیرون بکشند و از مسیر این فرآیند آن‌ها اغلب درک و فهم‌های جدید ریاضی را رشد و توسعه خواهند داد. دانش‌آموزان باید فرصت‌های فراوان و متواتر برای صورت‌بندی کردن، گلاویزشدن و حل‌کردن مسائل پیچیده‌ای که نیازمند و مستلزم تلاش و کوشش است، داشته

[16] Schoenfeld

باشند و پس‌ازآن ترغیب شوند که روی تفکرشان بازتاب و عکس‌العمل داشته باشند. با این تعاریف مسئله ریاضی مطرح‌شده برای یک دانش‌آموز، ممکن است برای دانش‌آموز دیگری مسئله نباشد. حل مسئله به روش پولیا شامل چهار مرحله است؛ فهمیدن مسئله، طرح یک نقشه، اجرای نقشه و بازگشت یا نگاه به عقب. در اولین مرحله یعنی «فهمیدن مسئله»، همان‌طور که پولیا می‌گوید باید به‌صورتی آشکار مشخص شود که چه چیزی خواسته شده است. طبق این الگو شاگرد باید در این مرحله بتواند بخش‌های اصلی مسئله، یعنی «مجهول»، «داده‌ها» و «شرط» مسئله را تعیین کند. شاید دقیقاً نتوان مشخص کرد که از چه زمانی وارد مرحله‌ی دوم یعنی «طرح نقشه» می‌شود [۱۷]. همواره ارتباط‌هایی بین فهم یک مسئله و طرح یک نقشه برای حل آن وجود دارد. به هر میزان که درک بهتری از مسئله حاصل شود، احتمال طرح نقشه‌ای برای حل آن بیشتر خواهد شد. شونفیلد [۴۲] برای تحلیل فعالیت حل مسئله در ریاضی، مدلی شامل چهار عامل را ارائه می‌دهد. این عوامل شامل منابع، رهیافت‌ها، کنترل و نظام باورها است. منابع، گنجینه‌ی دانش ریاضی فرد است که با آن مسئله و چگونگی اجرا و پیاده‌سازی راه‌حل را می‌فهمد. به‌عبارت‌دیگر دانش ریاضی که شخص در ارتباط با مسئله‌ی داده‌شده، دارا هست. البته همان‌گونه که شونفیلد اشاره می‌کند این منابع ممکن است معیوب و یا نادرست نیز باشند. رهیافت‌ها، پیشنهادهایی عمومی‌اند که به شخص کمک می‌کند تا مسئله را فهمیده و در حل آن پیشرفت کند. این سازوکارها شامل رسم شکل، انتخاب نمادهای مناسب، جستجوی مسائل مرتبط و... هست. کنترل به معنی انتخاب، نظارت، بازبینی و دنبال کردن راه‌حل‌های مناسب و یا اصلاح و ترمیم آن‌هاست. به تعبیری دیگر تصمیمات عمومی راجع به گزینش و به‌کارگیری منابع و رهیافت‌ها هست. نظام باورهای فرد نیز شامل دیدگاه او نسبت به موضوع، محیط و خودش است [۴۲]. همچنین میسون، بورتون و استیسی [۳۶] [17] چارچوب حل مسئله را با فرآیند تعمیم و تخصیص با مراحل ورود، حمله و مرور بیان می‌دارند و به معرفی فعالیت‌ها و اقدامات مؤثر در حل مسئله می‌پردازند. در مورد نقش و هدف حل مسئله در برنامه‌ی درسی سه دسته‌بندی مشخص‌شده است؛ تدریس برای حل مسئله که تدریس محتوای ریاضی برای کاربرد بعدی در حل مسائل ریاضی هست. در این نوع روش تدریس، معمولاً معلم محتوا و مفاهیم و الگوریتم‌های اولیه‌ی ریاضی را قبل از آنکه یادگیرندگان نیاز به آن‌ها را در حین حل مسئله احساس کنند، به آن‌ها ارائه می‌دهد سپس آن‌ها با دانستن آن مفاهیم و فرمول‌ها و روش‌ها به حل مسئله می‌پردازند. تدریس درباره‌ی حل مسئله، که تدریس استراتژی‌های رهیافتی برای رشد توانایی عمومی در حل مسائل است. در این نوع روشِ تدریس معلم رهیافت‌هایی نظیر آنچه پولیا برای حل مسئله پیشنهاد می‌کند، به دانش‌آموزان آموزش می‌دهد. تدریس از راه‌حل مسئله، که تدریس محتوای استاندارد ریاضی به‌وسیله‌ی ارائه مسائل غیر روتین دربردارنده‌ی این محتوا است و در این نوع روش تدریس معلم معمولاً مسئله‌ای از دنیای واقعی، که شامل مفهوم ریاضی درنظرگرفته شده برای تدریس است را مطرح می‌کند و دانش‌آموزان ضمن حل این مسئله، دانش ریاضی موردنظر را نیز فرامی‌گیرند [۲۴].

[17] Mason, Burton and Stacey

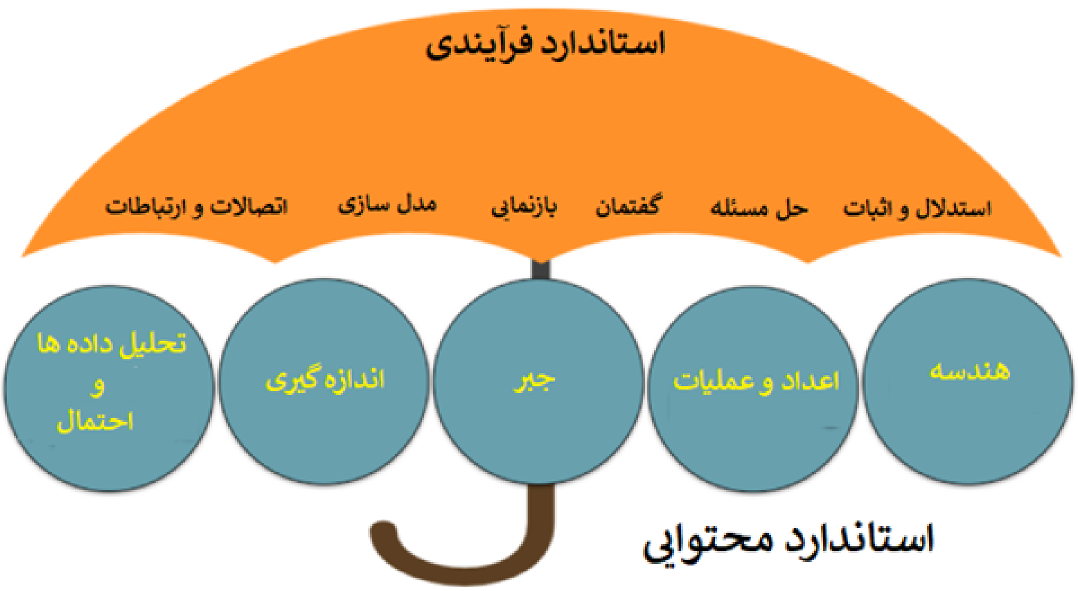
۶.۲. **مدل‌سازی.** مدل‌سازی ریاضی نمایش ساده و کلی جهان عینی به زبان ریاضی است. از میان مدل‌های گوناگونی که از یک پدیده می‌توان ساخت، بالاترین درجه ساده‌سازی متعلق به مدل‌های ریاضی است [۲۳]. مدل‌سازی ریاضی یک پدیده‌ی واقعی، این قابلیت را دارد تا توصیف، پیش‌بینی، ارزیابی و تصمیم‌گیری درباره‌ی آن پدیده را آسان‌تر نماید [۱۹]. بدیهی است که اگر فعالیت و محیط تصمیم‌گیری پیچیده نباشد، استفاده از مدل‌سازی ریاضی اهمیت چندانی ندارد. اما، اهمیت مدل‌سازی ریاضی زمانی مشخص می‌شود که تعداد متغیرهای تصمیم‌ساز، فعالیت و اهداف به‌طور سرسام‌آوری افزایش یابند [۱]. بنابراین، مدل‌سازی در ریاضیات، چگونگی انجام آن و بهره‌بردن از مواهب آن در زندگی روزمره و هنگام آموزش، برای یادگیرندگان، دانش‌آموزان و حتی معلمان ریاضیات در دوران مدرسه و دیگر مقاطع ارزشمند خواهد بود. انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا [۳۹] در سال ۲۰۲۰ بیان داشت یادگیری بکار بردن مفاهیم ریاضی فعالیتی است که با یادگیری مفاهیم ریاضی متفاوت است. درواقع مهارت‌هایی که باید برای موفق بودن در کاربرد علم ریاضی آموخت با مهارت‌های موردنیاز برای اثبات قضایا و حل معادلات ریاضی کاملاً متفاوت است. در مدل‌سازی ریاضی مسائل مختلفی که در دنیای واقعی وجود موردتوجه قرار می‌گیرد و هدف اصلی این است که هر مسئله از زندگی روزمره به‌صورت یک مسئله ریاضی تبدیل شود. این کار درواقع ماهیت اصلی مدل‌سازی ریاضی است [۶]. فرآیند مدل‌سازی ریاضی در یک نگاه کلی این مراحل را طی می‌کند؛ انتقال مسئله از دنیای واقعی به دنیای ریاضی، پیدا کردن جواب مسئله در دنیای ریاضی، تفسیر جواب و درنهایت بازگشت به مسئله در دنیای واقعی. لاوسون و ماریون [۳۵] [۱۸] ابراز داشته‌اند که معلمانی که درحال‌توسعه ظرفیت دانش‌آموزان برای «مدل‌سازی با ریاضیات» هستند، به‌صراحت بین سناریوهای دنیای واقعی و نمایش‌های ریاضی آن سناریوها حرکت می‌کنند. کریمی فردین‌پور و گویا بیان کردند مدل‌سازی ریاضی به‌طور فزاینده‌ای نقش مهمی در بسیاری از علوم ایفا می‌کند. دلیل این امر شاید مزیت‌هایی است که یک مدل‌سازی ریاضی از آن‌ها برخوردار است. مهم‌ترین این مزیت‌ها عبارت است از ریاضی زبانی بسیار دقیق است. این مطلب کمک می‌کند تا ایده‌ها به‌صورت فرمول درآورده شده و فرض‌های مربوط شناسایی شوند و البته ریاضی زبانی است مختصر و مفید. ریاضی زبانی است که همواره همراه با قوانین تعریف‌شده برای به‌کارگیری است. کلیه‌ی قوانین ریاضی که در طول سالیان دراز به اثبات رسیده است در اختیار هست. کامپیوترها می‌توانند برای محاسبات عددی موردنیاز به نحو بسیار مؤثری به کار گرفته شوند [۲۱]. اکثر پدیده‌ها در دنیای واقعی بسیار پیچیده‌تر از آن هستند که بتوان به‌طور کامل مدل‌سازی شوند. ازاین‌رو، اولین سطح ورود به مدل‌سازی، شناسایی مهم‌ترین ویژگی‌های یک پدیده است. این‌ها در مدل گنجانده می‌شوند، بقیه حذف می‌شوند. سطح دوم، مربوط به میزان دستکاری ریاضی است که ارزشمند است. اگرچه ریاضیات پتانسیل اثبات نتایج کلی را دارد، اما این نتایج به شکل قابل‌تأملی به شکل معادلات مورداستفاده بستگی دارد. تغییرات کوچک در ساختار معادلات ممکن است نیاز به تغییرات عظیم در روش‌های ریاضی داشته باشد. استفاده از کامپیوترها برای مواجه با معادلات مدل ممکن

[18] Lawson and Marion

است هرگز به نتایج ظریف و دقیقی منجر نشود، اما در برابر تغییرات بسیار قوی‌تر است. مدل‌سازی ریاضی را می‌توان به دلایل مختلف مورداستفاده قرار داد. این‌که یک نتیجه خاص چقدر درست به دست می‌آید، هم به وضعیت دانش در مورد یک پدیده واقعی و هم به‌خوبی انجام مدل‌سازی بستگی دارد [۳۵]. مدل‌سازی ریاضی فرآیند استفاده از ساختارهای مختلف ریاضی مانند نمودارها، معادلات، نمودارهای پراکنده، نمودارهای درختی و غیره برای نمایش موقعیت‌های دنیای واقعی است. مدل‌سازی یک مدل انتزاعی ارائه می‌دهد که یک مسئله را به ویژگی‌های اساسی آن کاهش می‌دهد. مدل‌های ریاضی به دلایل مختلفی مفید هستند. مهم‌تر از همه، مدل‌ها هسته ریاضی یک موقعیت را بدون اطلاعات اضافی نشان می‌دهند. به‌عنوان‌مثال، معادله $a = b+6$، تمام کلمات غیرضروری را از عبارت اصلی «کوروش ۶ سال از پیمان بزرگ‌تر است» حذف می‌کند [۳۲]. به نظر می‌رسد علی‌رغم اینکه استاندارد مدل‌سازی را در فرآیند استانداردهایی مانند حل مسئله، استدلال و اثبات می‌توان دید، اما خود مدل‌سازی یک استاندارد فرآیندی مستقل و مهم در آموزش ریاضی در دوره‌های مختلف آموزشی هست و توجه و استفاده از آن در فرآیند آموزش می‌تواند زمینه‌ی یادگیری مفاهیم مختلف ریاضی را مهیا سازد.

۳. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، برای اولین بار سعی شده است که اصول و استانداردهای آموزش ریاضی در قالب یک مقاله منسجم علمی ارائه گردد. هرچند مطالعات مختلفی در داخل و خارج از کشور در این موضوع انجام‌شده است، ولی این مطالعات تنها به بخش یا بخش‌هایی از اصول و استانداردهای آموزش ریاضی پرداخته‌اند و به نظر می‌رسید انجام یک مطالعه‌ی کامل که تمام اصول و استانداردهای آموزش ریاضی اعم از محتوایی و فرآیندی را پوشش دهد لازم بود. همچنین لازم به ذکر است که استاندارد فرآیندی مدل‌سازی برای اولین بار در این مطالعه مورداشاره و تشریح قرارگرفته است. اصول آموزش ریاضی از قبیل مساوات (عدالت آموزشی)، برنامه‌ی درسی، تدریس، یادگیری، ارزیابی و فناوری یک بستری است که شورای معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) برای ارتقاء آموزش و یادگیری ریاضی معرفی کرده‌اند. این اصول زمینه‌ای مناسب برای تدوین محتوای ریاضی و طراحی فرآیند آموزش مفاهیم آن مهیا کرده است که از آن به‌عنوان استانداردهای آموزش ریاضی نام‌برده شده است که مشتمل بر استانداردهای محتوایی و استانداردهای فرآیندی است. در ساحت و بستر اصول آموزش ریاضی، استانداردهای محتوایی که عبارتند از اعداد و عملیات، هندسه، جبر، اندازه‌گیری و تحلیل داده‌ها و احتمال تحت پوشش استانداردهای فرآیندی از قبیل استدلال و اثبات، حل مسئله، گفتمان، بازنمایی، اتصالات و ارتباطات و مدل‌سازی قرارگرفته‌اند. به‌بیان‌دیگر، استانداردهای محتوایی به‌وسیله استانداردهای فرآیندی از یاد دهنده به یادگیرنده منتقل می‌شوند و یادگیری آن‌ها بستگی به کیفیت استفاده از استاندارد فرآیندی دارد. در شکل ۳ چگونگی ارتباط استانداردهای محتوایی و فرآیندی ارائه‌شده است[۳۹].



شکل ۱: ارتباط استانداردهای محتوایی و فرآیندی

مراجع

۱. ع. آذر، ا. نجفی و س. نجفی، *مدل‌سازی ریاضی استوار، رویکردی نوین در بودجه ریزی عمومی ایران*، پژوهش‌های مدیریت در ایران، ۱۵ (۱۳۹۰)، ۱–۱۹.

۲. م. اجدادی، م. اسلام پور و ف. کلاهدوز، *ارزیابی مبتنی بر برقراری ارتباطات و اتصالات ریاضی گامی در جهت تحقق یادگیری معنادار و ایجاد انگیزه برای دانش‌آموزان*، پنجمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، ۲۷ آذرماه، مازندران، ایران، ۱۳۹۹.

۳. غ. احمدی، ا. ریحانی، و ن. نخستین روحی، *تأثیر آموزش مبتنی بر گفتمان ریاضی بر توانایی استدلال ریاضی دانش‌آموزان دوره متوسط*، روان شناسی مدرسه، ۴ (۱۳۹۴)، ۲۲–۳۷.

۴. س.م.ر. امام جمعه، و ح. دافعی *مهارتهای فرآیندی در برنامه درسی ریاضی دوره‌ی ابتدایی*، نخستین همایش ملی برنامه ریزی و تحول نظام آموزشی، قم، ایران، ۱۳۹۴.

۵. ح. باکوئی، ع. اندی، م.ح. خلیل ارجمندی، م.ح. خلیلی، و س. بالویی، *حل مسئله در آموزش ریاضی*، چهارمین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمودآباد، ایران، ۱۳۹۸.

۶. م.ت. جهاندیده، *مقدمه‌ای بر مدل‌سازی ریاضی*، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، ۱۳۹۰.

۷. م. حسنی، ر. دستجردی، م.ر. اسدی یونسی و م. پاکدامن *بررسی تأثیر آموزش مبتنی بر استانداردهای فرآیندی NCTM بر نگرش و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه پنجم در درس ریاضی*، مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، ۱۰(۱۴۰۰)، ۱۹۵–۲۱۴.

۸. س.ا. رحمانی، ف. قربانی، ج. شافعی زاده، و ف. استوار، *بررسی میزان استفاده از استانداردهای فرآیندی ریاضی در کتاب ریاضی پایه پنجم ابتدایی*، دومین همایش ملی آموزش ریاضی ابتدایی، گرگان، ایران ۱۳۹۹.

۹. م. رضایی، *مبانی آموزش ریاضی*، انتشارات دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، ۱۳۹۶.

۱۰. ح. دافعی، ص. نصر، صبا و پ. مقدمی، *گفتمان ریاضی؛ مهارتی اثربخش در آموزش ریاضیات دوره‌ی ابتدایی*،t دومین همایش ملی آموزش ریاضی ابتدایی، گرگان، ایران، ۱۳۹۹.

۱۱. م. سادات و م. صادقی، *مبانی آموزش ریاضی: جهت استفاده دبیران ریاضی و دانشجو معلمان*، انتشارات گلبن، اصفهان، ایران، ۱۳۹۶.

۱۲. ف. سراجی و آ. سیفی، *بررسی نقش مهارت‌های یادگیری الکترونیکی بر رضایت و موفقیت تحصیلی دانشجویان مجازی*، فناوری آموزش و یادگیری، ۱ (۱۳۹۴)، ۲۱–۵۷.

۱۳. ر. سلطانلو، ف. کلاهدوز و ا. ریحان، چگونه *فرآیند حل مسیله‌ی معلمان بهبود یافت*، دومین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمودآباد، ایران، ۱۳۹۶.

۱۴. س.ح. علم‌الهدایی، *اصول آموزش ریاضی*، نشرنما، مشهد، ایران، ۱۳۹۵.

۱۵. ص. علی زاده و ع. تنهایی، *بررسی تأثیر روش تدریس مبتنی بر حل مساله بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان بیرجند در درس ریاضی*،کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شیراز، ایران، ۱۳۹۵.

۱۶. س. غلام آزاد، *اعتبارسنجی برنامه درسی حوزه یادگیری ریاضیات، دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی ابتدایی و متوسطه نظری*، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۶.

۱۷. س. غلام آزاد، ز. گویا و ع.ر. کیامنش، *تأملی در مؤلفه‌های برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای ایران*،نظریه و عمل در برنامه درسی، ۹ (۱۴۰۰)، ۱۷۷–۲۰۶.

۱۸. ز. قربانی سی سخت، *بررسی اثر آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه روی درک دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی ازکسرها* ، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۸۸.

۱۹. م. کاظمی، *مدلسازی ریاضی وکاربرد آن در مدیریت*، مجله دانش و توسعه، ۲ (۱۳۷۴)، ۱۵۵–۱۶۷.

۲۰. ی. کریمی فردین پور و ز. گویا، *اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه ای*، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۳ (۱۳۸۵).

۲۱. ی. کریمی فردین پور و ز. گویا، *اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای* ۲۰۰۰ ،NCTM فصلنامه رشد آموزش ریاضی، پیاپی ۸۷ (۱۳۸۶)، ۲۶–۳۰.

۲۲. ز. گویا و ح. سرشتی، *آموزش حسابان:* مشکلات موجود و نقش تکنولوژی *(قسمت اول)*، فصلنامه رشد آموزش ریاضی، ۸۴ (۱۳۸۵).

۲۳. س.ه. میرقادری و م. زندیه، *طراحی یک الگوریتم فرا ابتکاری جدید بر اساس رفتار توابع ریاضی* $tanh, xcos(x)$ چشم‌انداز مدیریت صنعتي، ۱ (۱۳۹۰)، ۱۰۷–۱۲۳.

۲۴. ن. هاشمی، *استفاده از بازی در رفع اختلال یادگیری ریاضی درکودکان*، پژوهش در آموزش ریاضی، ۴ (۱۴۰۰)، ۵۷–۷۳.

۲۵. ع. ناهیدی، *تأثیر آموزش مبتنی برگفتمان ریاضی بر حل مسائل کلامی*، پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۹.

۲۶. ف. نوروزی، ش. بخشعلی زاده و ز. قربانی سی سخت، *بازنمایی‌های چندگانه: فرآیندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها* ، نشریه علمی پژوهشی فناوري آموزش، ۴ (۱۳۸۹)، ۲۳۹–۲۴۹.

27. D.P. Ausubel, *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt, Rinehart and Winston: New York, 1968.

28. N. Berger, E. Mackenzie, and K. Holmes, *Positive attitudes towards mathematics and science are mutually beneficial for student achievement: a latent profile analysis of TIMSS 2015,* Aust. Educ. Res. **47** (2020), no. 3, 409–444.

29. G. Bottle, *Teaching Mathematics in the Primary School*, Continuum, UK, 2005.

30. O. Buchbinder and S. McCrone, *Guiding Principles for Teaching Mathematics via Reasoning and Proving,* Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy, 2022.

31. R.W. Emerson and D. Anderson, *What mathematical images are in a typical mathematics textbook? Implications for students with visual impairments*, J. Vis. Impair. Blind. **112**(2018), 20–32.

32. M. Hill, *Best Practices for Mathematical Modeling*, Inspired Ideas, USA, 2018.

33. Y.H. Hu, J. Xing and L.P. Tu, *The effect of a problem-oriented teaching method on university mathematics learning,* EURASIA J. Math. Sci Tech. Ed. **14** (2018) 1695–1703.

34. Lampert, M. *When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching,* Am. Educ. Res. J. **27** (1990), 29–63.

35. D. Lawson and G. Marion, *An introduction to mathematical modelling*, Retrieved from website on August 2016 *http : //www.maths.bris.ac.uk/ madjl/course_text.pdf*, 2008.

36. J. Mason, L. Burton, and K. Stacey, *Thinking Mathematically*, Addison-Wesley, 2010.

37. E. Nardi, and E. Knuth, *Changing classroom culture, curricula, and instruction for proof and proving: How amenable to scaling up, practicable for curricular integration, and capable of producing long-lasting effects are current interventions?* Educ. Stud. Math. **96** (2017), 267–274.

38. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics*, Retrieved from www.nctm.org, 2006.

39. National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards of School Mathematics*, Retrieved from www.nctm.org, 2020

40. G. Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, USA, 1982.

41. E.A. Silver, J. Kilpatrick and B. Schlesinger, *Thinking Through Mathematics*, New York: College Board, 1995.

42. A.H. Schoenfeld, *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics* (Reprint), J. Educ. **196** (2016), 1–38.

43. J. Van de Walle, *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Allyn and Bacon, USA, 2006.

44. H. Yue, *Concept Maps as Assessment Tools in Mathematics: Comparison with Clinical Interviews*, The University of Texas at El Paso, USA, 2008.